INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A IX-A

1. Se consideră mulţimea $A=\left\{x\in\mathbb{R} \,/\, \textit{există } a,b\in\mathbb{Z}, \textit{ astfel încât } x^2+ax+b=0\right\}$.

Să se demonstreze că:

a) $1\in A$;

b) $1+\sqrt{2}\in A$;

c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\notin A$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care verifică relaţia $f(x-1)-2f(0)=2x-3 \ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Demonstraţi că $f(0)=1$.

b) Demonstraţi că $f(x)=2x+1, \ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) Calculaţi suma $S=\dfrac{1}{f(0)f(1)}+\dfrac{1}{f(1)f(2)}+...+\dfrac{1}{f(100)f(101)}$.

3. Se consideră un şir de numere reale strict pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ în progresie aritmetică cu raţia $\boldsymbol{r}$.

a) Demonstraţi că $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_k}-\dfrac{1}{a_{k+1}}\right), \forall k\geq 1$.

b) Să se arate că $S=\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+...+\dfrac{1}{a_{n-1}a_n}=\dfrac{n-1}{a_1a_n}, \forall n\geq 2$.

c) Calculaţi numărul $P=\left(1-\dfrac{r^2}{a_2^{\,2}}\right)\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_3^{\,2}}\right)\cdot...\cdot\left(1-\dfrac{r^2}{a_n^{\,2}}\right)$.

4. Fie patrulaterul ABCD şi punctele M, N mijloacele laturilor AB, respectiv CD iar O punctul de intersecţie al diagonalelor AC şi BD.

a) Demonstraţi că $2\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

b) Dacă AB || CD, arătaţi că punctele M, N şi O sunt coliniare.

c) Dacă punctele M, N şi O sunt coliniare, atunci AB || CD.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

Profil Tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CLASA A X-A

1. Se consideră următoarele numere reale $x, y \in (0,1)$, $x > y$, $A = \log_x (x-y)$ iar $B = \log_y (x-y)$.

a) Comparaţi numerele reale A şi B.

b) Demonstraţi echivalenţa $x^2 + y^2 = 3xy \Leftrightarrow A + B = 2 \cdot A \cdot B$.

2. Se consideră mulţimea $M = \{ z \in C \mid \ |z+i| = |z-i| \}$.

a) Să se verifice că $z_1 = 1 \in M$, iar $z_2 = 3 + 2i \notin M$.

b) Demonstraţi că dacă $z \in C$ astfel încât $|i \cdot z + 1| = |i \cdot z - 1|$, atunci $z \in M$.

c) Demonstraţi că $M = \mathbb{R}$.

3. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{2 + x\sqrt{5}}$.

a) Verificaţi că $f(1) \cdot f(-1) \in Z$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f(x) + f(-x) = \sqrt[3]{4}$, în mulţimea numerelor reale.

c) Daţi exemplu de un număr $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $f(t) \in \mathbb{N}$.

4. O maşină automată ambalează zahăr în pungi de 1 Kg şi apoi , cu un număr par de pungi, formează pachete identice pentru livrare. Datorită unui defect de fabricaţie al maşinii între pungile cu zahar, cântărind 1kg, mai intercalează, uneori, aleator, unele pungi cântărind numai 900 g. Ştiind că unui magazin i-a fost livrat un pachet cu zahăr cântărind 16,8 kg , se cere :

a) Stabiliti dacă în acel pachet pot fi exact două pungi cântărind 900g.

b) Determinaţi numărul pungilor din pachet.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XI-A

1. O matrice pătratică se numeşte ***ortogonală*** dacă este inversabilă, iar inversa ei coincide cu matricea transpusă.

a) Demonstraţi că matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ este matrice ortogonală.

b) Dacă $B \in M_2(R)$ este o matrice ortogonală , calculați determinantul matricei *B*.

c) Demonstraţi că există o infinitate de matrice ortogonale, de ordinul al doilea.

2. Se consideră determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{vmatrix}$, unde $a,b \in R$

a) Verificaţi egalitatea $D(a,b)=D(b,a)$, oricare ar fi numerele reale *a* şi *b*.

b) Să se demonstreze că $D(x,1)\cdot D(x,-1)=D(x^2,-1)$, oricare ar fi numărul real x.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{D\left(\sqrt{x},1\right)}{\sqrt{D(x,1)}}$.

3. Se consideră funcţia $f : R\setminus\{-1,0\} \to R,\ f(x)=\dfrac{e^x\cdot(1+x-e\cdot x)}{x(x+1)}$

a)Verificaţi egalitatea $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-\dfrac{e^{x+1}}{x+1}$, oricare ar fi $x \in R\setminus\{-1,0\}$.

b) Determinaţi asimptotele verticale ale funcţiei .

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+...+f(n)\right)$.

4. Un funcționar perspicace, făcând bilanţul activităţii pe luna februarie 2014, la punctul de acces pe podul de la Cernavodă, a observat că seriile primei şi a ultimei chitanţe, eliberate în acea lună, reprezintă cel mai mic şi, respectiv, cel mai mare număr de patru cifre distincte având produsul cifrelor egal cu zero. Ştiind că numărul autoturismelor reprezintă 75% din numărul vehiculelor care au plătit tranzitarea, se cere:

a) Câte chitanţe au fost eliberate ?

b) Câte autoturisme au tranzitat podul ?

c) Care este media zilnică a vehiculelor care au tranzitat podul în luna respectivă ?

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
8 martie 2014

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI SI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil Tehnic

CLASA A XII-A

1. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale, se consideră legea de compoziţie $x\circ y = xy-3x-3y+12$.
Fie $M=(-\infty,2]\cup[4,\infty)$.

a) Demonstraţi că $x\in M$ dacă şi numai dacă $|x-3|\geq 1$.

b) Demonstraţi că mulţimea M este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziţie "$\circ$".

c) Demonstraţi că $(M,\circ)$ este monoid comutativ.

d) Determinaţi elementele inversabile ale monoidului **.**

2. În inelul matricelor $M_2(\mathbb{Z}_6)$ se consideră matricile $A=\begin{pmatrix}\hat{2} & \hat{1}\\ \hat{4} & \hat{5}\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}\hat{5} & \hat{5}\\ \hat{2} & \hat{2}\end{pmatrix}$ şi

$E(a,b)=a\cdot A+b\cdot B$, unde a, $b\in\mathbb{Z}_6$.

a) Calculaţi $A^2, B^2, A\cdot B$ şi $B\cdot A$.

b) Demonstraţi că $E^3(a,b)=E(a,b)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{Z}_6$.

c) Câte matrice de forma $E(a,b)$, unde a, $b\in\mathbb{Z}_6$, sunt inversabile în inelul $M_2(\mathbb{Z}_6)$?

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}, x\geq 0\\ \dfrac{e^x}{3}+a, x<0\end{cases}$

a) Determinaţi valoarea parametrului a pentru care funcţia f admite primitive.

b) Determinaţi o primitivă a restricţiei funcţiei f la intervalul $[0,\infty)$.

c) Demonstraţi că $\int_0^4 f(x)dx\leq\dfrac{2}{3}$.

4. Un maxi-taxi parcurge un traseu între două oraşe. Ajuns la destinaţie şoferul, pasionat de matematică, observă că adunând viteza medie (km/h) cu lungimea traseului şi cu durata deplasării (în ore) obţine 304. Ştiind că toate mărimile se exprimă prin numere naturale , să se determine lungimea traseului.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*